

Facts.

$$\begin{aligned} \circ H^k(X, \mathbb{C}) &= \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) & \text{w/} & \begin{aligned} \circ \overline{H^{p,q}} &= H^{q,p} \\ \circ H^{p,q}(X) &= H^q(X, \Omega^p) \end{aligned} \end{aligned}$$

◦ (.) の特異コホモロジー表示:

$$H^k(X, \mathbb{C}) \times H^l(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\text{K\"unneth}} H^{k+l}(X \times X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\Delta^*} H^{k+l}(X, \mathbb{C})$$

◦ (.) の Dolbeault コホモロジー表示:

$$H^{p,q}(X) \times H^{r,s}(X) \xrightarrow{\wedge} H^{p+r, q+s}(X) : \text{微分係式の wedge 積.}$$

◦ Chern 類は  $\bigoplus H^{p,p}(X)$  に値を取る.

(よって  $\text{ch}$  や  $\text{td}$  も)

さらに  $\bigoplus H^{2p}(X, \mathbb{Q})$  にも入るから.

$\bigoplus H^{p,p}(X) \cap H^{2p}(X, \mathbb{Q})$  : algebraic part (?) を経由する.

Prop. 5.39

$$\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y) \quad \text{is equivalence なる}$$

$$\Phi_{\mathcal{P}}^H: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q}) \quad \text{よって, 任意の } |i| \leq \dim X \text{ で}$$

$$\bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p-q=i} H^{p,q}(Y) : \text{同型が誘導される.}$$

(準備) 
$$H^*(X \times Y, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p_1, q_1, p_2, q_2} H^{p_1, q_1}(X) \otimes H^{p_2, q_2}(Y)$$

$$\underbrace{ch(\mathcal{P}) \cdot \sqrt{td(X \times Y)}}_{\text{algebraic}} \mapsto \sum \alpha^{p_1, q_1} \otimes \beta^{p_2, q_2}$$

prf.

$$\mathbb{C} \otimes \Phi_{\mathcal{P}}^H: H^*(X, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{C})$$

$$\bigoplus_{p,q} H^{p,q}(X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(Y) \quad \text{if } p-q \in \mathbb{Z} \text{ かつ } p, q \in \mathbb{Z} \text{ なら}$$

$$\begin{array}{ccccc} H^*(X, \mathbb{C}) & \cong & \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(X) & \cong & H^{p,q}(X) \ni \alpha \\ \downarrow \Phi_{\mathcal{P}}^H & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X \times Y, \mathbb{C}) & \cong & \bigoplus H^{p_1, q_1}(X) \otimes H^{p_2, q_2}(Y) & \ni & \alpha \otimes 1 \\ \downarrow \cdot ch(\mathcal{P}) \cdot \sqrt{td(X \times Y)} & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(X \times Y, \mathbb{C}) & \cong & \bigoplus H^{p_1, q_1}(X) \otimes H^{p_2, q_2}(Y) & \ni & \sum (\alpha \wedge \alpha^{p_1, q_1}) \otimes \beta^{p_2, q_2} \\ \downarrow P_* & & \downarrow & & \downarrow \\ H^*(Y, \mathbb{C}) & \cong & \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(Y) & \ni & \sum \left( \int_X \alpha \wedge \alpha^{p_1, q_1} \right) \beta^{p_2, q_2} \end{array}$$

$$p+q = q_1+q_2 = n \text{ の和.}$$

$$\leadsto p-q = q_1-p_1 = p_2-q_2 \quad \square$$

$$\begin{array}{ccc}
 D^b(X)^2 & \xrightarrow[\sim]{\Phi_{\mathcal{F}}} & D^b(Y)^2 \\
 \downarrow \nu & \swarrow \chi \quad \nwarrow \chi & \downarrow \nu \\
 & \mathbb{Z} & \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 H^*(X, \mathbb{C})^2 & \xrightarrow[\Phi_{\nu(\mathcal{F})}^H]{\sim} & H^*(Y, \mathbb{C})^2
 \end{array}$$

$\Phi_{\mathcal{F}}$  is equivalence  $\Leftrightarrow$

$$\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \chi(\Phi_{\mathcal{F}}\mathcal{E}, \Phi_{\mathcal{F}}\mathcal{F}).$$

コホモロジー上は、コンパクトな  
 $\wedge^0 T^*M \cong \mathbb{C}$  である。

$$\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \langle \nu(\mathcal{E}), \nu(\mathcal{F}) \rangle$$

$$\langle \nu, \nu' \rangle = \langle \Phi_{\nu(\mathcal{F})}^H \nu, \Phi_{\nu(\mathcal{F})}^H \nu' \rangle$$

$$\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \chi(X, \mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{F})$$

$$\stackrel{\text{HRR}}{=} \int_X \text{ch}(\mathcal{E}^\vee) \cdot \text{ch}(\mathcal{F}) \cdot \text{td}(X)$$

$$= \int_X \text{ch}(\mathcal{E}^\vee) \cdot \sqrt{\text{td}(X)} \cdot \text{ch}(\mathcal{F}) \cdot \sqrt{\text{td}(X)}$$

$$= \int_X \underbrace{\nu(\mathcal{E}^\vee)}_{= \nu(\mathcal{E})} \cdot \nu(\mathcal{F})$$

$= \nu(\mathcal{E}) \cdot \nu(\mathcal{F})$  である。

$$\nu = (\nu_0, 0, \nu_2, 0, \dots) \in \bigoplus H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \text{ に対し,}$$

$$\nu^\vee := (\nu_0, 0, -\nu_2, 0, \dots) = \sum (-1)^k \nu_{2k} \in \bigoplus H^{2k}(X, \mathbb{Q}) \text{ である.}$$

$$\text{これは乗法的 i.e. } (\nu \cdot w)^\vee = \nu^\vee \cdot w^\vee$$

Fact.

$$\text{局所自由層 } E \text{ に対し } c_k(E^\vee) = (-1)^k c_k(E)$$

$\therefore$  Chern root の符号が反転する。

$$\leadsto \text{ch}(\mathcal{F}^\vee) = \text{ch}(\mathcal{F})^\vee$$

Lem. 5.41

$$\nu(\mathcal{E}^\vee) = \nu(\mathcal{E})^\vee \cdot \exp(C_1(X)/2)$$

prf.  $\nu(\mathcal{E}^\vee) = \text{ch}(\mathcal{E}^\vee) \cdot \sqrt{\text{td}(X)} = \nu(\mathcal{E})^\vee \frac{\sqrt{\text{td}(X)}}{\sqrt{\text{td}(X)}^\vee}$

$\leadsto$  要するに  $\text{td}(X) \stackrel{?}{=} \text{td}(X)^\vee \cdot \exp(C_1(X))$  を示す.

$\hookrightarrow$   $X$  の Chern root  $\varepsilon_i$  に対して

$$\text{td}(X) = \prod \frac{\varepsilon_i}{1 - \exp(-\varepsilon_i)} = \prod \frac{-\varepsilon_i}{\exp(\varepsilon_i) - 1} \prod \exp(\varepsilon_i) = \text{td}(X)^\vee \cdot \exp(C_1(X))$$

□

Def. 5.42 (Mukai pairing)

•  $\nu \in H^*(X, \mathbb{C}) = \bigoplus H^j(X, \mathbb{C})$  に対し.

$\nu^\vee := \sum \sqrt{-1}^j \nu_j \in H^*(X, \mathbb{C})$   $\varepsilon$   $\nu$  の dual と呼ぶ.

•  $H^*(X, \mathbb{C})$  上の Mukai pairing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$   $\varepsilon$ .

$$\langle \nu, \nu' \rangle := \int_X \exp(C_1(X)/2) \cdot (\nu^\vee \cdot \nu')$$

つまり、書いていたように、 $\chi(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = \langle \nu(\mathcal{E}), \nu(\mathcal{F}) \rangle$  となる.

Ex. 5.43

i)  $C_1(X) = 0$  ならば, by def  $\rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\begin{cases} \text{sym.} & \text{if } \dim X : \text{even} \\ \text{alt.} & : \text{odd.} \end{cases}$

ii) dual は乗法的.

iii)  $p: X \times Y \rightarrow Y$ : 射影のとき,  $\nu \in H^*(X \times Y, \mathbb{C})$  に対し

$$p_*(\nu)^\vee = (-1)^{\dim X} p_*(\nu^\vee) \quad \left( \because \text{K\"unneth} + p_* \text{ は } X \text{ 成分の積} \right. \\ \left. (\deg = 2n \text{ のとき}) \right)$$

Prop. 5.44

$$\Phi_{\mathcal{P}}: D^b(X) \xrightarrow{\sim} D^b(Y) \quad \text{is equivalence}$$

$$\Phi_{\mathcal{P}}^H: H^*(X, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^*(Y, \mathbb{Q}) \quad \text{is } \langle, \rangle\text{-isom}$$

prf.  $\langle \Phi_{\mathcal{P}}^H v, w \rangle_Y = \langle v, \Phi_{\mathcal{P}}^{H^{-1}} w \rangle_X$  を示す.

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{H^{-1}} = \Phi_{\mathcal{P}_L}^H \quad (\mathcal{P}_L = \mathcal{P}^\vee \otimes p^* \omega_Y[n])$$

$$\langle \Phi_{\mathcal{P}}^H(v), w \rangle_Y \rightsquigarrow \langle, \rangle \circ \Phi_{\mathcal{P}}^H \circ \text{def}$$

$$= \int_Y \exp(c_1(Y)/2) \cdot p^*(q^* v \cdot v(\mathcal{P}))^\vee \cdot w \quad \text{射影公式, Ex. 5.43(iii)}$$

$$= (-1)^n \int_{X \times Y} p^* \exp(c_1(Y)/2) \cdot (q^* v \cdot v(\mathcal{P}))^\vee \cdot p^* w \quad \text{v の乗法性}$$

$$= (-1)^n \int_{X \times Y} p^* \exp(c_1(Y)/2) \cdot q^* v^\vee \cdot v(\mathcal{P}^\vee)^\vee \cdot p^* w \quad \text{Lem. 5.41}$$

$$= (-1)^n \int_{X \times Y} p^* \exp(c_1(Y)/2) \cdot q^* v^\vee \cdot v(\mathcal{P}^\vee) \cdot (\exp(c_1(X \times Y)/2))^{-1} \cdot p^* w$$

$$= \int_{X \times Y} q^* v^\vee \cdot v(\mathcal{P}_L) \cdot q^* \exp(c_1(X)/2) \cdot p^* w \quad \text{red arrow}$$

$$= \int_X q_* \left( q^* (v^\vee \cdot \exp(c_1(X)/2)) \cdot v(\mathcal{P}_L) \cdot p^* w \right)$$

$$= \int_X v^\vee \cdot \exp(c_1(X)/2) \cdot q_* (v(\mathcal{P}_L) \cdot p^* w) = \langle v, \Phi_{\mathcal{P}_L}^H w \rangle_X$$

$$\star (-1)^n v(\mathcal{P}_R) \cdot q^* e^{\frac{c_1(X)}{2}} \cdot e^{\frac{c_1(X \times Y)}{2}}$$

$$\mathcal{T}_{X \times Y} = q^* \mathcal{T}_X \oplus p^* \mathcal{T}_Y$$

$$= v(\mathcal{P}^\vee) \cdot \text{ch}(q^* \omega_X^\vee) \cdot q^* e^{\frac{c_1(X)}{2}} \cdot e^{\frac{q^* c_1(X)}{2} + \frac{p^* c_1(Y)}{2}}$$

$$= v(\mathcal{P}^\vee) \cdot q^* e^{-c_1(X)} \cdot q^* e^{\frac{c_1(X)}{2}} \cdot q^* e^{\frac{c_1(X)}{2}} \cdot p^* e^{\frac{c_1(Y)}{2}}$$

$$= v(\mathcal{P}^\vee) \cdot p^* e^{\frac{c_1(Y)}{2}}$$

$$c_1(\omega_X) = c_1(\det \mathcal{T}_X^\vee) = -c_1(\mathcal{T}_X) \quad \square$$

★ 楕円曲線でも導来同値  $\Rightarrow$  同型 だった。  
 $\omega_X$ : 自明.

①  $D^b(E) \simeq D^b(E')$  が  $\Phi_{\mathcal{P}}$  で実現されるとする.

②  $\Phi_{\mathcal{P}}^H: H^*(E, \mathbb{Q}) \simeq H^*(E', \mathbb{Q})$  の  $p-q = -1$  パートを見て

$$H^1(E, \mathbb{Q}) \simeq H^1(E', \mathbb{Q}) \quad \text{が得られたが、}$$

$$\begin{array}{ccc} \cup & \mathbb{Q} & \cup \\ H^{0,1}(E) & \simeq & H^{0,1}(E') \end{array}$$

③  $E \cong H^{0,1}(E) / H^1(E, \mathbb{Z})$

$$E' \cong H^{0,1}(E') / H^1(E', \mathbb{Z})$$

より,  $\Phi_{\mathcal{P}}^H$  が  $H^1$  上 整数係数の同型に  
 落ちればよい.

$$\textcircled{4} \quad \Phi_{\mathcal{P}}^H(v) = p_* \left( \underbrace{q^* v \cdot \text{ch}(\mathcal{P})}_{\parallel} \cdot \underbrace{\sqrt{\text{td}(E \times E')}}_{\substack{\parallel \\ 1}} \right)$$

Abel より 持来自明.

$$\text{rk } \mathcal{P} + c_1(\mathcal{P}) + \underbrace{\frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2)(\mathcal{P})}_{\text{今考えている } H^1 \text{ には関係しない}}$$

今考えている  $H^1$  には関係しない.

□.

Cor. 5.46

$C$ : sm. proj. curve /  $\mathbb{C}$

$X$ : sm. proj. var. /  $\mathbb{C}$

が 導来同値 なら  $C \cong X$ .